ACADÉMIE DES SCIENCES.
SÉANCE DU LUNDI 14 SEPTEMBRE 1942.
PRÉSIDENCE DE M. ERNEST ESCLANGON.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

Notice sur M. TULLIO LEVI-CIVITÀ, par M. ÉLIE CARTAN.

C'est avec un grand retard que l'Académie a été informée du décès de notre Confrère M. Tullio Levi-Civita, survenu à Rome le 29 décembre 1941. Né à Padoue le 29 mars 1873, il fit ses études à l'Université de sa ville natale, où il devint successivement assistant, professeur libre, professeur extraordinaire et professeur ordinaire de Mécanique rationnelle (1902). En 1918 il fut appelé à l'Université de Rome, où il fut chargé d'abord de la chaire d'Analyse supérieure, puis en 1928 de la chaire de Mécanique rationnelle.

L'œuvre scientifique de Levi-Civita est considérable et englobe l'Analyse mathématique, la Géométrie différentielle, la Mécanique, l'Hydrodynamique, la Physique mathématique.

Après quelques recherches variées d'Analyse, Levi-Civita se signala à l'attention du monde savant par plusieurs travaux importants de Mécanique, dont je citerai deux des plus saillants. Il a résolu complètement, en ce qui concerne les mouvements spontanés, le problème, posé par Painlevé, de la transformation des équations de la Dynamique, qu'il a ramené à celui de la représentation géodésique des variétés riemanniennes. Il a poursuivi et complété les recherches de Liapounoff sur la stabilité des mouvements, montrant en particulier sur des exemples simples que la stabilité est plus exceptionnelle que ne pourrait le faire croire la méthode des petites oscillations. En Mécanique céleste, on doit en particulier à Levi-Civita une régularisation canonique des équations différentielles du problème des trois corps au voisinage d'un choc binaire, plus simple que la régularisation célèbre de Sundman.

En Hydrodynamique, je citerai deux groupes de travaux particulièrement importants. Le premier se rapporte à la théorie du sillage, inaugurée par Helmholtz en vue d'expliquer un profond désaccord avec l'expérience que soulevait la théorie classique du mouvement d'un liquide parfait dans lequel est immergé un solide; la théorie des mouvements plans avec sillage de Levi-Civita constitua dans cet ordre d'idées un progrès remarquable et suscita de

nombreuses recherches en Italie et à l'étranger, en particulier de nos Confrères Marcel Brillouin et Henri Villat. Un autre groupe de travaux se rapporte à la recherche des ondes irrotationnelles périodiques d'ampleur finie et se propageant sans altération de forme; Stokes et Lord Rayleigh s'étaient beaucoup occupés de ce problème, et Lord Rayleigh en était arrivé à douter de l'existence de telles ondes. Levi-Civita trancha la question en résolvant complètement le problème, et son travail fut encore l'origine de nombreux travaux ultérieurs (Struik, Weinstein etc.).

En Physique mathématique, je me contenterai de signaler un article remontant à 1897, dans lequel Levi-Civita déduit les équations de Maxwell des anciennes lois d'action à distance de Coulomb, Biot-Savart, F. Neumann, en remplaçant simplement les potentiels ordinaires par des potentiels retardés. On trouve là un exemple frappant du souci constant qu'a montré Levi-Civita d'éclairer les idées nouvelles en les rattachant autant que possible aux bases les plus solides de nos connaissances antérieures. On trouve trace de ce souci dans des Mémoires récents sur les invariants adiabatiques et dans une exposition élémentaire nouvelle des principes de la Relativité restreinte.

Les travaux dont je viens de parler auraient suffi pour assurer à Levi-Civita un rang éminent parmi les mathématiciens. Mais ce qui a permis à la renommée de notre Confrère de déborder le cercle des spécialistes, c'est le rôle qu'il a joué dans l'histoire du calcul différentiel absolu, ce sont les nombreuses applications qu'il en a données. Élaboré à partir de 1884 par Gregorio Ricci, le maître de Levi-Civita à l'Université de Padoue, le calcul différentiel absolu, qui trouve son origine dans les travaux de Gauss, Lamé, Riemann, Beltrami, Christoffel, Darboux, est essentiellement une théorie analytique des formes différentielles quadratiques et de leurs invariants. Levi-Civita fut un des premiers à comprendre et à montrer, par ses propres travaux, que le nouveau calcul constituait un puissant instrument de découverte. C'est à la collaboration de Levi-Civita et de Ricci qu'est dû le Mémoire célèbre inséré en 1900 dans les *Mathematische Annalen* sous le titre *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, et qui rendait évidente, pour les mathématiciens avertis, l'importance du nouveau calcul. Néanmoins il a fallu, quinze ans plus tard, que notre Confrère Einstein adoptât le calcul différentiel absolu comme l'unique instrument approprié aux problèmes mathématiques posés par sa théorie de la Relativité généralisée pour que ce calcul sortît du cercle assez étroit dans lequel il était utilisé. La connaissance du calcul différentiel absolu est dès lors devenue indispensable à tout mathématicien et à tout physicien.

Il était réservé à Levi-Civita de lui apporter un dernier perfectionnement par la découverte en 1917 de la notion du transport parallèle. En rendant plus intuitives les notions fondamentales du calcul différentiel absolu, elle faisait entrer une théorie, jusqu'alors purement analytique, dans le domaine de la Géométrie. Il en résulta des répercussions profondes sur le développement de

la Géométrie elle-même, à laquelle la découverte de Levi-Civita donna un nouvel essor, comparable par son ampleur à celui que lui avait imprimé près d'un demi-siècle auparavant le célèbre Programme d'Erlangen de Felix Klein. Une théorie générale nouvelle des transports parallèles et des connexions, susceptible de fournir de nouveaux schémas géométriques aux physiciens, allait s'édifier par les travaux de H. Weyl, J. A. Schouten, O. Veblen, L. Eisenhart, É. Cartan. Par son rôle de précurseur dans cette ample floraison de la Géométrie différentielle, le nom de notre confrère Levi-Civita est assuré d'une place non moins éminente dans l'histoire de la Géométrie que dans l'histoire de l'Analyse, de la Mécanique et de la Physique mathématique.

Il me reste à dire quelques mots des importantes contributions apportées par Levi-Civita à la théorie de la Relativité généralisée, spécialement dans le domaine de la nouvelle Mécanique céleste. On peut citer de notre Confrère plusieurs Mémoires fondamentaux sur les Univers statiques. Il s'est attaqué avec succès au problème général des deux corps, où se présentent déjà de très grosses difficultés, signalées par notre Confrère Marcel Brillouin, et tenant à la non-validité du principe de l'action et de la réaction. Par une analyse serrée, Levi-Civita a pu énoncer des conclusions précises se rapportant à certaines inégalités séculaires, susceptibles d'être soumises au contrôle de l'expérience par une observation suffisamment prolongée de certaines étoiles doubles.

Levi-Civita a publié plusieurs Ouvrages didactiques, où se remarquent ses qualités de clarté et d'élégance. Je me contente de citer un grand Traité de Mécanique rationnelle, en collaboration avec M. Ugo Amaldi, ses *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (1925), dont une édition anglaise (1927) est enrichie de toute une partie nouvelle consacrée aux applications à la Physique, enfin un petit livre traduit en français, *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*, où la simplicité de l'exposition s'allie à la profondeur des points de vue.

Levi-Civita a été souvent appelé à exposer ses découvertes à l'Étranger, et de nombreuses Académies ont tenu à honneur de se l'attacher comme Membre. Correspondant de notre Académie dans la Section de Mécanique dès 1911, il a été élu Associé étranger en 1938. Dans son pays, il était Membre de l'Académie nationale des Lincei, et, parmi les distinctions qui lui furent accordées, celle à laquelle il ne fut sans doute pas le moins sensible fut en 1937 sa nomination de Membre de l'Académie pontificale internationale des Sciences que venait de créer le pape Pie XI.

Dans sa vie tout entière consacrée à la Science, Levi-Civita s'était attiré, par ses qualités d'homme, l'estime profonde de ses collègues et l'affectueuse vénération de ses élèves. Nous adressons à M[me] Levi-Civita, qui sut l'entourer constamment de sa vigilante affection, l'expression de notre très respectueuse sympathie.

BIOLOGIE. — *Sur deux types généraux de régression numérique chez les Acariens.* Note de M. **François Grandjean.**

Dire qu'une évolution phylogénétique est régressive et qu'elle se fait par tout ou rien, ou encore, plus brièvement, qu'elle est une régression numérique, n'est pas suffisant pour la définir. Étudions les organes extérieurs des Arthropodes, dans un groupe d'Acariens comprenant les Oribates, les Pachygnathidæ et les Terpnacaridæ ([1]). On y distingue aisément des régressions numériques de plusieurs sortes.

Dans certains cas, l'organe disparaît au cours de l'ontogénie (rétrorégression). Ce cas comprend lui-même plusieurs types. Je n'en parle pas ici, car je le considère comme exceptionnel. Dans d'autres, beaucoup plus fréquents, son ontogénie reste progressive (prorégression) ou du moins non régressive. C'est le cas général, mais il n'est pas simple, comme le montre la comparaison des espèces.

Selon les espèces (ou les races), un organe peut se former à la larve, à la proto-, à la deuto-, à la tritonymphe, ou à l'adulte. Il peut aussi manquer, ce qui voudra dire, sauf indication contraire, qu'il manque à toutes les stases. Pour chaque organe, dressons un tableau donnant ces renseignements. Procédons de la même manière pour tous les organes et comparons les tableaux entre eux. Laissons de côté ceux qui se rapportent à des organes constants. Les autres sont principalement de deux types que je désigne par A et B pour ne faire d'abord aucune hypothèse.

Dans le type A, le tableau comprend des stases qui changent avec les espèces, depuis une stase S_0 jusqu'à l'adulte, sans prépondérance, ou du moins sans prépondérance excessive, de S_0.

Voici un exemple de ce type, qui est très commun :

Le poil v' du génual I se forme à la protonymphe chez *Eulohmannia Ribagai*, *Heminothrus Targionii*, *Nothrus palustris*, *Hermannia reticulata* etc.; à la deutonymphe, chez *Parhypochthonius aphidinus*, *Nanhermannia nanus*, *Camisia segnis*, *Poroliodes farinosus*, *Ceratoppia bipilis* etc.; à la tritonymphe, chez *Eniochthonius pallidulus*, *Trhypochthonius tectorum*, *Fuscozetes fuscipes*, *Pelops acromios* etc.; à l'adulte, chez *Pseudotritia ardua*, *Trimalaconothrus* sp., *Scheloribates lævigatus* etc. Il manque chez *Hypochthonius rufulus*, *Meristacarus porcula*, *Trhypochthoniellus setosus* etc.

Dans cet exemple, où S_0 est la protonymphe, toutes les stases postlarvaires sont abondamment représentées. Pour d'autres organes, le tableau est plus court, S_0 étant la deutonymphe, la tritonymphe ou l'adulte. Il peut aussi

(1) En réalité je ne choisis pas ce groupe. C'est actuellement le seul dont je connaisse assez le développement pour pouvoir faire, entre espèces, de très nombreuses comparaisons à toutes les stases.

être moins complet, certaines stases ne correspondant qu'à un petit nombre d'espèces, ou même à aucune, mais l'organe, sauf le cas où S_0 est l'adulte, montre néanmoins qu'il est capable de se former à des stases diverses. Il n'y a pas d'exemple, pour le moment, dans lequel S_0 soit la larve.

Le type A est celui de la régression par retardement. J'en ai parlé déjà à plusieurs reprises. L'organe qui régresse est chassé, de stase en stase, dans le sens de l'ontogénie, c'est-à-dire vers l'adulte, et finalement disparaît.

Dans le type B, le tableau ne comprend qu'une seule stase, que j'appelle S_0, de sorte que l'organe apparaît à cette stase, ou n'existe pas. Je place également dans ce type les organes qui apparaissent presque toujours à S_0, sauf chez un très petit nombre d'espèces où ils se forment à une stase postérieure.

Voici des exemples :

Le poil *d* du fémur III, quand il existe, est toujours larvaire (formé dès la larve). Il manque chez *Bimichaelia diadema*.

Les deux poils exobothridiques du prodorsum, de chaque côté, appelés aussi exostigmatiques ou latéraux, existent dès la larve chez les *Palæacariformes*, *Parhypochthonius*, les *Hypochthoniidæ*, les *Lohmanniidæ*, *Eulohmannia*, *Pachygnathus*, *Bimichaelia*, les *Terpnacaridæ*. Chez les autres Acariens du groupe, de beaucoup les plus nombreux, un de ces poils manque et quelquefois le deuxième également. Je n'ai jamais vu un poil exobothridique se former au cours du développement.

Les 3 anneaux postlarvaires de l'opisthosoma n'apparaissent qu'un à un et sans interruption dans l'ontogenèse. Le 1er anneau (VI), s'il existe, est protonymphal. Le 2e (VII), s'il existe, est deutonymphal et, dans tous les exemples connus, un anneau protonymphal s'est formé avant lui. Le 3e (VIII), s'il existe, est tritonymphal et, dans tous les exemples connus, 2 anneaux, l'un deutonymphal et l'autre protonymphal, se sont formés avant lui.

On peut répéter pour les 3 cupules postlarvaires de l'opisthosoma, de chaque côté, ce que je viens de dire des anneaux. Si elles existent, elles sont respectivement protonymphale sur V, deutonymphale sur VI et tritonymphale sur VII.

Le poil *l'* du génual III, quand il existe, est larvaire. Il manque chez la plupart des *Malaconothridæ*. Chez *Nanhermannia nanus*, il se forme à la tritonymphe ou à l'adulte.

Le solénidion ω_2II (postlarvaire du 2e tarse) est deutonymphal chez *Sebaia*, *Bimichaelia* et presque tous les Oribates. Il manque chez *Pachygnathus*, *Petralycus*, *Eniochthonius*, *Meristacarus*, *Camisia*, *Nothrus*, et les *Malaconothridæ*. Chez *Pseudotritia ardua*, il est tritonymphal.

Le type B est celui de la suppression brusque. A de rares exceptions près, l'organe qui régresse disparaît simultanément à toutes les stases. On peut dire qu'il est lié à la stase S_0 en ce sens qu'il ne semble pouvoir se former qu'à cette stase.

Le plus souvent, dans le groupe zoologique étudié, un organe postlarvaire qui régresse est du type A, tandis que, s'il est larvaire, il appartient au type B ([2]). D'assez nombreux organes postlarvaires appartiennent cependant aussi au type B.

Envisageons maintenant les écarts individuels. J'ai signalé leur accord avec des différences entre espèces ([3]). La distinction des types A et B est fondée sur ces dernières différences. Est-elle possible dans un cadre plus étroit, celui de l'espèce, d'après des différences entre individus?

Quand un organe évolue selon le type A, il est en général facile de trouver des espèces où cet organe est nettement aléatoire. C'est alors principalement à sa stase de formation. L'organe apparaît avec le maximum d'écarts. Dès la stase suivante, il n'en a plus guère, ou même aucun. La probabilité d'existence de l'organe, en fonction du temps ontogénétique, est très rapidement croissante.

Quand un organe évolue selon le type B, ses écarts individuels sont presque toujours très rares. On observe, par exemple, un écart pour une centaine d'observations, de sorte qu'il faudrait examiner plus d'un millier d'exemplaires, à chaque stase, pour pouvoir déduire quelque chose des résultats obtenus. Encore pourrait-on supposer que des écarts aussi clairsemés sont accidentels. Ces conditions sont décourageantes. Cependant, si l'organe n'est pas larvaire, ses écarts m'ont paru moins rares chez certaines espèces et j'ai enfin trouvé un cas où ils sont très communs. C'est celui du solénidion ω_2II chez *Sebaia rosacea*.

Le tableau suivant donne pour cet organe, chez *Sebaia*, et en même temps pour un organe aléatoire du type A, le poil *l''* du 2[e] tibia, observé sur les mêmes exemplaires, les nombres d'exemplaires de chaque stase ayant les caractères indiqués. Il donne aussi les fréquences. La population de *Sebaia* a été recueillie en deux fois, en juin et août 1938, mais au même point du sol, sous un épicéa.

		Larve.	Proto-nymphe.	Deuto-nymphe.	Trito-nymphe.	Adulte.
Nombre d'exemplaires observés		50	32	50	50	50
ω_2II (type B)	Présence des 2 côtés du corps.	0	0	12	13	12
	» d'un seul côté »	0	0	29	27	30
	Absence des 2 côtés »	50	32	9	10	8
	Fréquence de l'organe	(0:100)	(0:64)	(53:100)	(53:100)	(54:100)
*l''*TII (type A)	Présence des 2 côtés du corps.	0	0	1	50	49
	» d'un seul côté »	0	0	14	0	1
	Absence des 2 côtés »	50	32	35	0	0
	Fréquence de l'organe	(0:100)	(0:64)	(16:100)	(100:100)	(99:100)

([2]) Les organes postlarvaires étant beaucoup plus variables que les larvaires, dans leur ensemble, on remarque le type A plus vite que l'autre. Après mes premières observations sur la régression numérique des petits organes, j'ai même parlé du retardement, d'une manière plus ou moins implicite, comme du seul type général.

([3]) *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 1854; **214**, 1942, p. 732.

Le contraste entre les deux organes, pour le comportement ontogénétique des écarts, est aussi marqué que possible. Le poil l'' n'est franchement aléatoire qu'à la deutonymphe. Ensuite sa probabilité prend une valeur voisine de 1. Pour le solénidion ω_2, au contraire, l'existence de l'organe est aléatoire à partir de la deutonymphe, et l'on peut admettre que la probabilité, voisine de 0,5, ne change plus.

Ainsi, d'après cet exemple, la distinction entre A et B peut se faire dans chaque espèce, sans la comparer à d'autres, pourvu que l'organe étudié ait des écarts assez nombreux. Il suffit de voir si la fréquence croît très vite dans l'ontogenèse ou reste à peu près invariable.

Si d'autres exemples venaient confirmer celui-ci, nous aurions un nouvel argument, très remarquable, en faveur de la signification évolutive des écarts.

Dans le type B, l'organe se comporte quelquefois, très rarement, comme dans le type A. J'en ai cité deux exemples dans cette Note (l'GIII chez *Nanhermannia nanus*, ω_2II chez *Pseudotritia ardua*). De ces exceptions nous ne pouvons rien conclure pour le moment, mais seulement retenir, s'il est prouvé qu'elles ne correspondent pas à des erreurs d'homologie, que la séparation entre A et B n'est pas absolue pour tous les organes.

CORRESPONDANCE.

ALGÈBRE. — *Remarques sur les théorèmes d'isomorphisme.*

Note de M. **Paul Dubreil**, présentée par M. Gaston Julia.

1. Nous nous proposons de montrer que les *théorèmes d'isomorphisme* de la théorie des groupes résultent, par simple spécialisation, de propositions beaucoup plus générales, valables pour des *groupoïdes quelconques* [1] (théorèmes 1*b*, 2*b*). Dans le même ordre d'idées, nous avons déjà indiqué des théorèmes valables pour des ensembles et des équivalences quelconques : avec certaines précisions supplémentaires, nécessaires pour la suite, ils nous serviront ici de points de départ (théorèmes 1*a*, 2*a*) [2].

---

(1) Nous employons ici le mot *groupoïde* dans le même sens que O. Ore, c'est-à-dire ensemble où est définie une opération (ou loi de composition). Cette signification ne doit pas être confondue avec celle qui a été donnée au même mot par Brandt (*Math. Ann.*, 96, 1926, p. 360).

(2) Cf. P. Dubreil et M.-L. Dubreil-Jacotin, *Journal de Math.*, 18, 1939, p. 85. Nous renvoyons à ce travail, ainsi qu'à celui qui est cité dans la note (3), pour certaines définitions qui ne peuvent être rappelées ici. Les théorèmes 1*b*, 2*b* ont été exposés dans des conférences faites à l'Institut Henri Poincaré, à Paris, en mars 1941. Je viens d'avoir connaissance d'un intéressant travail de M. O. Borůvka [*Ueber Ketten von Faktoroiden*

2. Soit $x \to \bar{x}$ une application univoque d'un ensemble $E = \{x, \ldots\}$ sur un ensemble $\bar{E} = \{\bar{x}, \ldots\}$. Désignons par $\mathfrak{p}$ l'*équivalence d'application*, définie par

$$x_1 \equiv x_2 (\mathfrak{p}); \quad \text{si} \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2.$$

THÉORÈME 1*a*. — *Les équivalences* $\bar{\mathcal{R}}$ *définies dans* $\bar{E}$ *et les équivalences* $\mathcal{R}$ *définies dans* E *et contenant* $\mathfrak{p}$ *se correspondent biunivoquement, les relations*

$$x_1 \equiv x_2 (\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \bar{x}_1 \equiv \bar{x}_2 (\bar{\mathcal{R}})$$

étant vérifiées en même temps. Les ensembles-quotients $E/\mathcal{R}$, $\bar{E}/\bar{\mathcal{R}}$ *se correspondent biunivoquement* ([3]).

Supposons maintenant que les ensembles E, $\bar{E}$ soient des *groupoïdes* auxquels est associé éventuellement un même domaine d'opérateurs Δ, et que l'application $x \to \bar{x}$ soit un *homomorphisme permis* $E \sim \bar{E}$.

THÉORÈME 1*b* (*premier théorème d'isomorphisme pour les groupoïdes*). — *Les équivalences* $\mathcal{R}$ *et* $\bar{\mathcal{R}}$ *qui se correspondent biunivoquement comme l'indique le théorème* 1*a*, *sont en même temps régulières et permises, et la correspondance biunivoque entre les groupoïdes quotients* $E/\mathcal{R}$, $\bar{E}/\bar{\mathcal{R}}$ *est un isomorphisme permis.*

Le premier théorème d'isomorphisme pour les groupes s'en déduit immédiatement en utilisant le théorème 1 du Mémoire cité dans la note ([3]).

(*Math. Ann.*, 118, 1941, p. 41)] où sont traités indépendamment des problèmes analogues. La méthode utilisée ici diffère de celle de M. Borůvka par l'emploi systématique des équivalences. M. Borůvka donne le nom de *factoroïde* au groupoïde-quotient. Son étude, très complète, conduit à un théorème de Jordan-Hölder pour les chaînes de factoroïdes.

([3]) Malgré son caractère très général, cette proposition contient déjà le théorème classique sur les *groupes imprimitifs*. Soit Γ un groupe transitif de transformations d'un ensemble E en lui-même. Une équivalence $\mathcal{R}$ définie dans E est appelée *équivalence d'imprimitivité* (pour Γ) si

$$x \equiv y (\mathcal{R}) \quad \text{entraîne} \quad \sigma x \equiv \sigma y (\mathcal{R}) \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in \Gamma.$$

Γ est *imprimitif* s'il existe au moins une équivalence d'imprimitivité autre que l'égalité ou l'équivalence absolue. Distinguons dans E un élément a : en associant à chaque transformation $\sigma \in \Gamma$ l'élément $x = \sigma a$ de E, nous définissons une application univoque de Γ sur E. L'équivalence d'application $\mathfrak{p}_a$, définie par

$$\sigma \equiv \sigma' (\mathfrak{p}_a); \quad \text{si} \quad \sigma a = \sigma' a,$$

est évidemment régulière à gauche; la classe-unité H_a est donc un sous-groupe de Γ [cf. P. DUBREIL, *Contribution à la Théorie des demi-groupes*, th. 2 (*Mémoires de l'Académie des Sc.*, t. 63, p. 3)]; H_a est d'ailleurs le sous-groupe des transformations de Γ qui laissent a invariant. Il existe, d'après le théorème 1*a*, une correspondance biunivoque entre les équivalences $\mathcal{R}$ de E et les équivalences $\mathfrak{p}$ de Γ qui contiennent $\mathfrak{p}_a$. D'autre part, on voit aisément que, pour que $\mathfrak{p}$ soit régulière à gauche, il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ soit une

3. Une équivalence $\mathfrak{p}$, définie dans un ensemble E, mais considérée seulement dans une partie M de E, sera dite *limitée à* M et désignée par $\mathfrak{p}_M$. D'autre part, nous appellerons *extension saturée* de M par $\mathfrak{p}$ et désignerons par $S = \mathfrak{p}(M)$ l'ensemble de tous les éléments de E équivalents mod $\mathfrak{p}$ à au moins un élément $m \in M$.

THÉORÈME 2*a*. — *Les ensembles-quotients* $M/\mathfrak{p}_M$ *et* $S/\mathfrak{p}_S$ *se correspondent biunivoquement, les classes homologues étant celles qui contiennent un même élément de* M.

Supposons que E soit un *groupoïde avec opérateurs*, et que $\mathfrak{p}$ soit une *équivalence régulière et permise*.

THÉORÈME 2*b* (*second théorème d'isomorphisme pour les groupoïdes*). — $\mathfrak{p}_M$ *est une équivalence régulière et permise,* S *est un sous-groupoïde permis, dans lequel* $\mathfrak{p}_S$ *est régulière et permise, et l'on a l'isomorphisme permis*

$$\frac{M}{\mathfrak{p}_M} \simeq \frac{S}{\mathfrak{p}_S}.$$

Si E est un *groupe*, la classe-unité mod $\mathfrak{p}$ est un *sous-groupe invariant permis* U de E. Si, de plus, M est un *sous-groupe permis* de E, la classe-unité mod $\mathfrak{p}_M$ est le sous-groupe invariant permis $U \cap M$; S est le sous-groupe permis UM, et l'on retrouve le théorème classique

$$\frac{M}{U \cap M} \simeq \frac{UM}{U}.$$

MÉCANIQUE PHYSIQUE. — *Déformation des solides.*
Note de M. **Christian de Carbon**, présentée par M. Albert Caquot.

L'hypothèse de Hooke, base du calcul élastique des contraintes, n'est qu'approchée. Elle s'éloigne beaucoup des faits dès que les déformations sont importantes, et s'en écarte même aux faibles amplitudes, comme le montre l'existence du frottement interne.

L'analyse des faits expérimentaux m'a montré que la déformation peut être considérée comme la somme de deux termes :

1° un terme indépendant du temps (compte tenu des forces d'inertie);

équivalence d'imprimitivité pour Γ; or, à une équivalence $\mathfrak{p}$ régulière à gauche correspond comme classe-unité un sous-groupe H de Γ, ensemble des transformations σ telles que $\sigma a \equiv a(\mathcal{R})$. Par conséquent, *les équivalences d'imprimitivité relatives au groupe transitif* Γ *correspondent biunivoquement aux sous-groupes* H *compris entre* Γ *et le groupe* H_a *des transformations de* Γ *qui laissent invariant un élément* a *de* E.

2° une déformation progressant avec le temps.

Les deux lois fondamentales sont les suivantes :

Première loi. — *Les déformations indépendantes du temps se déterminent comme si le corps résultait en tous points de l'assemblage intime d'éléments plastiques parfaits à caractéristiques différentes.*

Deuxième loi. — *Les déformations dépendantes du temps se déterminent comme si le corps résultait en tous points de l'assemblage intime d'éléments visqueux parfaits à caractéristiques différentes.*

Première loi. — Considérons la courbe de la première déformation d'une éprouvette (*fig.* 1). L'effort $F(\alpha)$, suivant la déformation α, est la somme

Fig. 1. — Courbe de première déformation.

Fig. 2. — Exemple de cycle d'hystérésis mécanique.

des efforts $r(\alpha)$ de rappel élastique, et $f(\alpha)$ des frottements plastiques.

Par définition, les forces $r(\alpha)$ sont proportionnelles à α et les forces $f(\alpha)$ des constantes indépendantes de la déformation.

L'augmentation de F n'est ainsi due qu'aux éléments encore dans le domaine élastique à l'instant considéré, d'où $dF = [r(\alpha)/\alpha]\,d\alpha$, et comme conséquence $r_\alpha = (dF/d\alpha)\,\alpha$.

En menant dans la figure 1 la droite OB parallèle à la tangente en un point quelconque de la courbe, nous en déduisons

$$CB = r(\alpha) \quad \text{et} \quad BP = f(\alpha).$$

Le potentiel emmagasiné dans les forces élastiques peut toujours s'écrire $\int_0^F \alpha\,dF$. D'où il résulte que l'énergie dissipée dans les déformations plastiques est $\int_0^F F\,d\alpha - \alpha\,dF$.

Le potentiel élastique est représenté par l'aire du triangle curviligne OPQ, et l'énergie dissipée est égale au double de l'aire balayée par le vecteur OP.

Hystérésis mécanique. — J'ai pu vérifier expérimentalement les faits suivants qui sont des conséquences de la première loi lorsque les phénomènes de viscosité sont négligeables :

1° *La forme du cycle d'hystérésis est indépendante de la vitesse de déformation* (*fig.* 2);

2° *Le tracé du cycle se compose de deux arcs symétriques par rapport à l'origine et homothétiques dans le rapport* ± 2 *à la courbe de première déformation;*

3° *La pente de la courbe, immédiatement après chaque inversion, est ainsi la pente correspondante du diagramme de première déformation;*

4° *L'aire* S *du cycle est* 8 *fois l'aire s balayée par le vecteur* OP *dans la première déformation* $S = 8s$;

5° *A l'origine, le rayon de courbure est infini, et la courbe est impaire.*

L'hypothèse de Hooke est une loi osculatrice à la loi réelle pour les faibles déformations.

6° *L'aire du cycle d'hystérésis est donc un infiniment petit du* 4ᵉ *ordre par rapport à la déformation.*

Et dans le domaine inférieur à la limite de fatigue, l'expérience est représentée avec précision par $S = A\alpha^4 + B\alpha^6$, A et B étant deux coefficients caractéristiques des glissements internes.

7° Il en résulte pour F la valeur

$$F = a\alpha - \frac{A}{2}\alpha^3 - \frac{3B}{8}\alpha^5.$$

8° *On ne modifie pas l'énergie dissipée en ajoutant à l'effort alternatif une déformation constante de même type.*

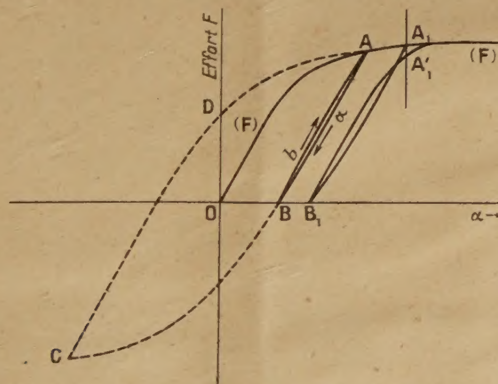


Fig. 3. — Explication du relèvement de la limite élastique par l'écrouissage, du principe de Tresca, du principe de Wiedemann.

L'écrouissage antérieur, dans ce cas de déformation de même type, est donc sans action sur le frottement interne.

9° La déformation permanente OB (*fig.* 2) est un infiniment petit du 3e ordre par rapport à la déformation α_A.

Augmentation de la limite élastique par écrouissage. — Effectuons (*fig.* 3), à partir d'un point A de la première déformation, un cycle d'hystérésis tel que A*a*B*b*A; ce cycle représente l'évolution avec plus de précision que le segment de droite AB du principe de Tresca, le point A s'appuyant sur la courbe de première déformation, comme l'indiquait Wiedemann.

Nous retrouvons ces faits classiques, mais avec une précision accrue.

La séance est levée à 16h20m.

L. B.